revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

# O INFINITO: COMPREENSÕES QUE PERPASSAM TEORIAS, ENSINO E APRENDIZAGEM

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.20.279-305

Juscimar da Silva Araujo[1]
Giovana Alves[2]
José Milton Lopes Pinheiro[3]
César Oswaldo Vásquez Flores[4]

**Resumo:** Este estudo visa explicitar *o que se evidencia como invariante entre teorias que pensam e definem o infinito, e como este invariante se expõe em situações de ensino e de aprendizagem*. Para tanto, realiza-se um estudo bibliográfico, retomando o infinito no âmbito de diferentes perspectivas, buscando convergências com as quais se possa expor o que é comum aos discursos nelas articulados. Compreende-se que, em meio às variações formais e epistemológicas, a *intuição de infinitude* se mostra como um ponto de interseção entre os discursos matemático, físico e filosófico. Evidencia-se que, se inserida a perspectiva do ensino e aprendizagem, o mesmo ponto se destaca, como proposta didática para constituição de um solo perceptivo e intuitivo com o qual se avança a articulação de conceitos mais abstratos de infinito e de conteúdos matemáticos aos quais o mesmo está inserido.
**Palavras-chave:** Infinito. Teorias do infinito. Intuição de infinitude. Educação Matemática.

# INFINITY: UNDERSTANDINGS THROUGH THEORIES, TEACHING AND LEARNING

**Abstract:** This study aims to explain what is evident as an invariant between the theories that explain the infinite, and how this invariant could be employed in the teaching and learning situations. To do this, a bibliographic study is carried out, resuming the infinite in the scope of different perspectives along with seeking the convergences with which to expose and what is common to the speeches articulated in them. It is understood that amid formal and epistemological variations, the intuition of infinity is represented as a point of intersection between the mathematical, physical and philosophical discourses. It is evident that, if the perspective of teaching and learning are inserted, a point stands out as a didactic proposal for the constitution of a perceptive and intuitive soil with which an advancement of the articulation of more abstract concepts of the infinite and mathematical contents to which it is inserted.
**Keywords:** Infinity, theories of infinity, intuition of infinity, Mathematical Education.

## Introdução

Quando se busca compreender a história do desenvolvimento do pensamento humano,

[1] Mestre em Matemática Aplicada e Computacional. Professor no Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL/Imperatriz). E-mail: juscimararaujo@uemasul.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5328-0825
[2] Doutora em Matemática. Professora no Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL/Imperatriz). E-mail: giovana.alves@uemasul.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9952-3391
[3] Doutor em Educação Matemática. Professor no Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL/Imperatriz). E-mail: jose.pinheiro@uemasul.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0989-7403
[4] Doutor em Física. Professor no Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas da Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão (UEMASUL/Imperatriz). E-mail: cesar.vasquez@uemasul.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1298-9920

bem como entender como o mesmo foi se configurando como conhecimento formalmente aceito, está-se adentrando uma rede ampla e complexa cujos inúmeros direcionamentos possíveis inviabilizam qualquer movimento de síntese que abarque o todo de possibilidades. No entanto, no centro desta rede é possível destacar como um dos maiores questionamentos da humanidade *a origem de tudo*, que enlaça a origem do universo e da vida. Esse questionamento, antes de constituir-se como interrogação da ciência, se consolida como um pensar filosófico.

Uma das concepções possíveis nesse pensar é a ideia de infinito, termo que antes de ser pela primeira vez exposto em configurações matemáticas, foi foco de discussões filosóficas e desafiava concepções historicamente enraizadas. A busca pela *origem de tudo*, *sempre* lançou a humanidade em um mar de "ter para onde ir". É com a percepção do *sempre* na *origem* que vai se configurando uma noção de continuidade e de infinitude.

Na Física, os primeiros passos para operacionalização do conceito de infinito foram dados por Galileu. Ele definiu velocidade instantânea como a "velocidade média" calculada quando o corpo percorre uma distância infinitamente pequena num intervalo de tempo infinitamente pequeno. Embora esta definição tenha sido aceita à época, o método do cálculo desta velocidade só surge após criação do Cálculo Diferencial, que na linguagem newtoniana, definiu velocidade como a razão de duas quantidades tendentes a zero, dois infinitésimos. Do infinitamente grande para o infinitamente pequeno, da imensidão cosmológica para o microcosmo, os conceitos de infinito, infinidade e infinitésimo vêm permeando a Física desde muito tempo (MORRIS, 1998).

Objetiva-se com o já explicitado mostrar que o infinito pode ser visado de diferentes perspectivas. Aqui, faz-se destaque aos olhares lançados pela Matemática, Física e Filosofia, objetivando mediante estudo expor convergências com as quais se possa pensar situações de ensino e de aprendizagem de matemática.

O direcionamento ao ensino e aprendizagem dá-se pela evidência das dificuldades de alunos do ensino superior com disciplinas iniciais que solicitam uma compreensão do infinito matemático, como por exemplo as disciplinas de Cálculo, cujo índice de reprovação em duas das maiores universidades brasileiras, USP e UFF é de 50% (AMADEI, 2005). Tais disciplina solicitam uma expansão do pensamento matemático, constituindo dados abstratos com os quais se deve racionalmente operar.

Questiona-se, portanto: *o que se evidencia como invariante*[5] *entre teorias que propõem*

[5] Denota-se invariante, numa perspectiva fenomenológica, como o que é estruturante do objeto investigado, o que se mantém histórico e culturalmente presente, mesmo variando-se os campos teóricos e práticos a partir dos

*reflexões sobre e que definem o infinito, e como este invariante se expõe em situações de ensino e de aprendizagem?*

Para compreender o que indaga esta interrogação, assume-se aqui uma metodologia qualitativa de investigação, com a qual se persegue a interrogação tendo-a como norte de pesquisa, no entanto, sem dela fazer ajuizamento prévio. Foi realizado um estudo bibliográfico e, com ele, fez-se uma articulação entre o dito pelos pesquisadores estudados e o compreendido pelos autores deste texto, expondo modos pelos quais o infinito se evidencia junto às ciências e outros espaços possíveis. O foco deste estudo direciona-se ao que dizem os pesquisadores no âmbito da Matemática, da Física e da Filosofia sobre a temática, já explicitando que ela mesma não permite afirmar que se contemplará todas as abordagens, bem como todos os estudiosos que a ela se voltam. Articula-se o compreendido com estes pesquisadores aos estudos apresentados no campo da Educação Matemática, que versam sobre o infinito.

## Modos de compreender o infinito

O termo *infinito* é usualmente expresso em nosso cotidiano, seja de modo científico ou por falas de senso comum. Ao consultar Houaiss (2007), entende-se por infinito: sem fim; que não se pode terminar, finalizar; eterno; que não se consegue contar, mensurar; imensurável; que não possui limites, delimitações; que não teve princípio nem há de ter fim; aquilo que não se pode demarcar; inalcançável; grandeza que não se consegue calcular, medir.

No âmbito da Matemática essas asserções ganham ideias correlatas que descrevem propriedades que fazem do infinito um objeto matemático, tais como: incomensurável, infinitésimos, limites e divisibilidade infinita. Ao infinito se associa o símbolo $\infty$, cuja expressão sugestiona um laço que sempre retorna a si mesmo, articulando assim uma correlação entre a ideia e sua representação simbólica.

Em Eves (2004) entende-se que os estudos sobre o infinito na Matemática têm sido historicamente estruturados sobre a busca por justificar processos plausíveis de serem repetidos indefinidamente, visando fazer destas repetições demonstrações de propriedades matemáticas. Nesse movimento histórico, como não poderia deixar de ser, os esforços direcionados à compreensão do infinito trazem propostas de quantificação do infinito, que convergem a compreensões mais amplas, que as abarcam, como: *infinito potencial* e *infinito*

---

quais dele se possa falar. É aquilo que se encontra no ser próprio da coisa pensada, sem o qual dela não se possa falar.

*atual* (em ato), assim definidos por Radice (1981, p. 8): "*infinito potencial, para uma sucessão de elementos, é a possibilidade de ir sempre mais longe, sem que se atinja um elemento último. ... Um infinito em ato, portanto, e não apenas em potência é uma infinidade realizada, e não apenas não completável; esgotada e não unicamente inesgotável".*

A busca por compreender e definir o infinito incentivou estudiosos a focarem o objeto matemático. As implicações desta busca deixaram alguns matemáticos desacreditados ao mesmo tempo que impulsionou a vida e obra de outros. Galileu, por exemplo, chegou a concluir que "havia algo de muito esquisito com os números infinitos e que o melhor que se tinha a fazer era evitá-los. A infinidade, disse ele, era 'inerentemente incompreensível'" (MORRIS, 1998, p.16). Por outro lado, George Cantor se dedicou intensivamente a mostrar que a infinidade podia ter um rigoroso tratamento matemático, como será explicitado no tópico que segue.

## O infinito sob olhar Matemático

Entende-se em Eves (2004) que um dos primeiros filósofos antigos a examinar e se aproximar de concepções acerca do infinito foi Zenão de Eleia (490 – 430 a.C), que valendo-se das ideias de espaço, tempo e movimento articulou e expos paradoxos até hoje muito enfatizados quando se foca o infinito.

Destaca-se, aqui, dois paradoxos, a Dicotomia e Aquiles, através dos quais Zenão argumenta que se o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis, o movimento seria impossível. No paradoxo da Dicotomia, segundo Morris (1998), não se pode cobrir um número infinito de pontos num tempo finito; tem-se que percorrer a metade de uma dada distância antes de percorrê-la inteiramente, e a última metade antes de cobri-la no seu todo. E assim vai *ad infinitum*, de modo que (sendo o espaço feito de pontos) há um número infinito de pontos em qualquer dado espaço, e este não pode ser percorrido em um tempo finito. No paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, o argumento é semelhante. Aquiles não pode alcançar uma tartaruga, pois deve primeiro alcançar o lugar do qual partiu a tartaruga. Ao atingir este ponto de partida da tartaruga esta já se moveu uma certa distância para frente. Aquiles então tem que percorrer mais essa distância, o que permite à tartaruga avançar mais uma distância. Ele está cada vez mais próximo da tartaruga, mas nunca consegue alcançá-la.

Nesses paradoxos tem-se como explicitações do infinito o processo de divisibilidade infinita (Dicotomia) e a *sempre* solicitação de um novo passo (Aquiles), a primeira numa ideia de redução e, a segunda, de expansão. Tem-se assim modos de mostrar-se o infinito. Quando se compreende que há *modos*, algumas interrogações se colocam: será o infinito sempre o mesmo? É o infinito ou os infinitos? Há a possibilidade de diferentes infinitos? Uns maiores ou menores que os outros?

Pode-se pensar que todos os conjuntos infinitos têm o mesmo tamanho, mas este não é o caso, por um famoso resultado. O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$**)** é maior que o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$**)**. Isto foi demonstrado por Cantor e constitui seguramente um dos maiores resultados matemáticos de todos os tempos.

Nos seus Elementos, Euclides (≈ 300 a.C.) coloca como fato fundamental a seguinte "noção comum" (axioma): *o todo é maior do que as suas partes*. Esta afirmação é plausível quando se trabalha com conjuntos finitos. Por exemplo, considera-se o conjunto dos números inteiros positivos de 1 a 100 e toma-se uma parte desse conjunto, os inteiros positivos de 1 a 10. No entanto, o mesmo princípio não pode ser aplicado em conjuntos infinitos. Galileu Galilei (1564 - 1642) observou o seguinte fato: a relação que associa $n^2$ ao número natural $n$ estabelece uma correspondência um-a-um (ou bijetora) entre os números naturais 0, 1, 2, 3, . . . e os quadrados 0, 1, 4, 9, . . . que parecem existir em menor quantidade (DOURADO, 2015).

$$\begin{array}{ccccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{\ldots} \\ 0 & 1 & 4 & 9 & \ldots \end{array}$$

A cada número da primeira linha, corresponde um, e um só, número da segunda linha e vice-versa. No entanto, todos os números da segunda linha também podem ser encontrados na primeira, ou seja, como observou Galileu, no conjunto infinito dos naturais a parte era igual ao todo. O mesmo problema ocorre no caso dos segmentos dos números reais entre 0 e 1 e entre 0 e 2. Bernardo Bolzano (1781-1848), matemático e filósofo, examinou esses dois intervalos de números [0, 1] e [0, 2], percebendo a correspondência bijetora:

$$\begin{array}{c} f: [0, 1] \rightarrow [0, 2] \\ x \ \rightarrow \ 2x \end{array}$$

Generalizando, pode-se colocar em correspondência bijetora os intervalos [0, 1] e [0, *a*], para todo número real *a*. Assim, nega-se "o todo é maior que a parte". Bolzano propôs, em sua obra *Os paradoxos do infinito*, que se veja essas correspondências bijetoras entre o todo e uma de suas partes, como a marca característica das totalidades infinitas (DELAHAYE, 2006).

Mais tarde, o matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916), admitiu a propriedade vislumbrada por Bolzano, que contrariava o axioma de Euclides, e, em 1888, num artigo intitulado: *O que são e para que servem os números?*, ele utilizou-a para apresentar uma definição de conjunto infinito (e conjunto finito):

**Definição 1:** *Um conjunto A é infinito se, e somente se, existir um subconjunto próprio B de A ($B \subset A$ e $B \neq A$) e uma correspondência um-a-um entre A e B; e o conjunto A será finito se não for infinito.*

O trabalho principal foi realizado pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), que descobriu muitas propriedades a respeito do tamanho de conjuntos infinitos. Ele encontrou distinções entre o tamanho dos conjuntos infinitos. A definição de cardinalidade (#) constitui um modo de explicitar tais distinções:

**Definição 2:** *Sejam X e Y dois conjuntos. Indica-se $\#X < \#Y$ se existir uma função injetora $f : X \rightarrow Y$, ou seja, a quantidade de elementos de X não excederá a quantidade de elementos de Y. Note que, se $X \subset Y$, então $\#X < \#Y$. Diz-se também que dois conjuntos X e Y têm o mesmo número cardinal, se existir uma bijeção $f : X \rightarrow Y$. Neste caso, $\#X = \#Y$.*

Uma explicitação da cardinalidade dos naturais pode ser observada no paradoxo do Hotel de Hilbert, apresentado em 1925, pelo matemático alemão David Hilbert. Nele há um hotel com quartos infinitos sempre lotados, com um hóspede em cada quarto. Porém, sempre que chega um novo cliente, o gerente pede que os hóspedes mudem para o quarto ao lado. Uma descrição mais pormenorizada desse paradoxo pode ser vista em Delahaye (2006).

Georg Cantor descobriu numerosas propriedades e distinções a respeito do tamanho de conjuntos infinitos. Sempre ocupado em classificar os infinitos, Cantor introduziu a notação $\aleph_0$ (primeira letra do alfabeto hebraico: *alef*) para designar a cardinalidade do conjunto dos números naturais, que é o menor infinito possível, ou seja, $\aleph_0 = \# \mathbb{N}$.

Conforme Dourado (2015) Cantor, então, começou a investigar esta questão, e em 1882, num trabalho intitulado: Fundamentos de uma teoria geral das multiplicidades. *Uma investigação matemático-filosófica da teoria do infinito*, introduziu o conceito de enumerabilidade de conjuntos:

**Definição 3:** *Um conjunto é enumerável se, e somente se, for um conjunto finito ou estiver em correspondência um-a-um (bijetora) com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.*

Desta forma, a questão do "tamanho do infinito" reduz-se, em princípio, em analisar a enumerabilidade dos conjuntos:

- ✓ **Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$):**

Intuitivamente tem-se que entre dois números naturais consecutivos não existe nenhum número natural. Entretanto, sabe-se que existe uma infinidade de frações. E ainda, indo um pouco mais além, entre dois racionais quaisquer existe ainda uma infinidade de racionais. Vendo esta propriedade, pode-se conjecturar $\mathbb{Q}$ tenha cardinalidade maior do que a

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

cardinalidade dos números naturais, ou seja, que seja não-enumerável. Entretanto, ao analisar a enumerabilidade do conjunto dos números racionais, Cantor obteve a constatação de que este conjunto é do mesmo tamanho que o conjunto dos números naturais, ambos possuem a mesma cardinalidade. Por outras palavras: O conjunto $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável.

Para demonstrar este resultado, ele construiu uma correspondência um-a-um entre os racionais positivos (para os negativos vale o mesmo raciocínio) e os naturais usando um método totalmente novo, chamado *método da grade infinita* (DOURADO, 2015), representada abaixo:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
\overset{\mathbf{0}}{\to} & 0 & \overset{\mathbf{1}}{\to} & \frac{1}{1} & \overset{\mathbf{2}}{\to} & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \overset{\mathbf{6}}{\to} & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \overset{\mathbf{12}}{\longrightarrow} & \frac{6}{1} & \cdots \\
 & & & & \mathbf{3}\swarrow & & \mathbf{5}\nearrow & & \mathbf{7}\swarrow & & \mathbf{11}\nearrow & & \mathbf{13}\swarrow & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \frac{6}{2} & \cdots \\
 & & & \mathbf{4}\downarrow & \mathbf{1}\nearrow & & \mathbf{8}\swarrow & & \mathbf{2}\nearrow & & \mathbf{14}\swarrow & & \mathbf{5}\nearrow & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \frac{6}{3} & \cdots \\
 & & & & \mathbf{9}\swarrow & & \mathbf{1}\nearrow & & \mathbf{15}\swarrow & & \mathbf{20}\nearrow & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \frac{6}{4} & \cdots \\
 & & & \mathbf{10}\downarrow & \mathbf{3}\nearrow & & \mathbf{16}\swarrow & & \mathbf{1}\nearrow & & & & & & \\
 & & & \frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & & \frac{6}{5} & \cdots \\
 & & & & \mathbf{17}\swarrow & & \mathbf{19}\nearrow & & & & & & & & \\
 & & & \frac{1}{6} & & \frac{2}{6} & & \frac{3}{6} & & \frac{4}{6} & & \frac{5}{6} & & \frac{6}{6} & \cdots \\
 & & & \mathbf{18}\downarrow & \mathbf{4}\nearrow & & & & & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Para obter uma bijeção entre os números naturais e os números racionais, traça-se uma linha poligonal entre 0 e 1, e que continua indo e voltando diagonalmente sem saltos pelas frações. Acompanhando a ordenação obtida por meio desta linha poligonal, obtém-se uma bijeção. Nessa grade, às frações equivalentes faz-se associação ao mesmo natural.

## ✓ O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Ao considerar o conjunto de todos os números reais, Cantor constatou que este conjunto não era enumerável, mas era infinito, pois $f : (0,\ 1) \to \mathbb{R}$, definida por: $f\,(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+|x|} + 1\right)$ é uma bijeção e o intervalo (0, 1) é uma parte própria de $\mathbb{R}$ (ANDRADE, 2010). Desse modo, para provar que o conjunto $\mathbb{R}$ é não-enumerável, é suficiente mostrar que o intervalo (0, 1) não é enumerável. Para tanto, usa-se o método da diagonal de Cantor. Suponha que (0, 1) seja enumerável. Neste caso, existirá uma correspondência um-a-um entre $\mathbb{N}$ e o intervalo (0, 1), de modo a se poder listar todos os elementos do intervalo da seguinte forma:

$$1 \to 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}...$$
$$2 \to 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}...$$
$$3 \to 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}...$$
$$\vdots$$
$$n \to 0,\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}...$$

em que cada $a_{ij} \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Considere agora o número D entre 0 e 1 definido por D = *0,* $d_1\ d_2\ d_3...$, onde $d_1 = a_{11} + 1$, $d_2 = a_{22} + 1$, $d_3 = a_{33} + 1$ e assim por diante, observando que se $a_{kk}$= 9, então $d_k$ = 0. É bastante claro que D está entre 0 e 1, entretanto D não pode estar na lista acima, pois $d_1 = a_{11} + 1 \neq a_{11}, d_2 \neq a_{22}, d_3 \neq a_{33}$, e assim sucessivamente, mostrando que o número D não está na lista. Portanto, não se pode criar uma correspondência um-a-um entre o conjunto $\mathbb{N}$ e o intervalo (0, 1). Logo, a cardinalidade dos números reais, também chamada de contínuo e denotada pelo símbolo *c*, é maior do que a cardinalidade do conjunto dos números naturais. Em símbolos: $\aleph_0 < c$.

Sabendo que o infinito dos números reais é maior do que o infinito dos números naturais, surgem as questões: Será que existem infinitos maiores do que o infinito dos números reais? Se houver, como os obter? Para responder estas questões, utiliza-se a definição a seguir e um dos maiores teoremas de Cantor.

**Definição 4:** *O conjunto formado por todos os subconjuntos de um dado conjunto A é chamado conjunto das partes de A, e é denotado por P(A).*

Cantor mostrou, pelo argumento diagonal, que conjuntos infinitos podem apresentar uma infinidade de tamanhos diferentes. Mais precisamente, um conjunto A não pode jamais ser colocado em bijeções com o conjunto de suas partes *P(A).* Dessa forma, o conjunto *P(P(A))* não pode ser posto em bijeção com *P(A).* Para isso, usou o seguinte resultado:

**Teorema 1 (Primeiro Teorema de Cantor):** *Se A é um conjunto, finito ou infinito, então a cardinalidade de A é (estritamente) menor do que a cardinalidade do conjunto das partes de A. Em símbolos: #A < #P(A).*

Desse modo, para qualquer conjunto infinito, existe um outro conjunto, diferente deste, que é maior na grandeza de infinito, que é, a saber, o conjunto das partes deste mesmo conjunto. Ou seja, sempre existe um infinito maior do que o infinito de qualquer conjunto infinito, que é o infinito do conjunto das partes deste mesmo conjunto. Portanto, estão respondidas explicitamente as questões colocadas no início desta seção (DOURADO, 2015).

Numa perspectiva geométrica, o infinito se fez e estimulou primeiras discursões sobre elementos matemáticos. Por exemplo, um problema geométrico se pôs aos pitagóricos, que consistia em demonstrar a comensurabilidade entre as medidas (segmentos) da diagonal e do lado de um quadrado de lado 1. Como resultado, pelo Teorema de Pitágoras, encontrou-se *número algum*, apenas a expressão $\sqrt{2}$ (não racional, portanto, não conhecido à época). Assim, o problema que consistia em demonstrar a comensurabilidade, demonstrou o que se compreende como um dos primeiros incomensuráveis (que não se pode explicitar de forma finita), bem como como uma das primeiras evidências do surgimento dos irracionais (EVES, 2004). Outro exemplo de incomensurabilidade refere-se ao comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 1, que resulta em $2\pi$, também irracional, cujo explicitação aritmética apresenta número com infinitas casas decimais.

Um importante nome na história da Matemática é Eudoxo de Cnido (400-350 a.C.) a quem é creditado o *método de exaustão*, no qual se admite a possibilidade de indefinidamente se subdividir uma grandeza, de modo que: "se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie" (EVES, 2004, p. 419). Arquimedes de Siracusa (290-212 a.C.) foi o primeiro a usar o método de exaustão com rigor, explicitando com isso uma soma infinita, com a qual calculou área limitada por uma das mais importantes curvas geométricas, a parábola.

Somente no Renascimento, por volta de 1700, Newton e Leibniz inventaram o cálculo infinitesimal, apresentando fórmulas para o cálculo das mais variadas áreas e volumes, assim como o comprimento de curvas. O Cálculo Infinitesimal é a principal ferramenta Matemática que trata o infinito. O método da exaustão foi um grande estimulador dos métodos infinitesimais desenvolvidos para resolver problemas, por exemplo, de áreas e volumes (MORRIS, 1998).

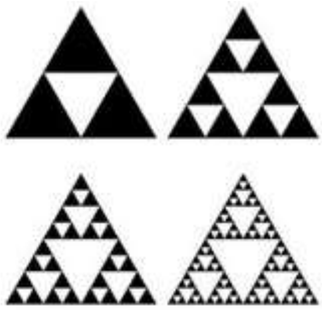
No século XIX, surge uma nova geração de matemáticos, em destaque, o matemático Georg Cantor que, como já explicitado, ele "contou" os elementos dos conjuntos infinitos e os comparou. O raciocínio de Cantor estendeu-se à Geometria quando ele compara reta e plano e, apesar de intuitivamente pensar que a reta teria uma menor quantidade de pontos, ele prova que ambos possuem a mesma quantidade. Ou seja, é possível estabelecer uma relação bijetiva entre esses dois conjuntos. Com isso, Cantor ampliou os horizontes da Matemática. Um grande exemplo disso é a importância que sua abordagem teve para a base da *Teoria dos Fractais* considerada hoje um notável avanço no conceito de dimensão. "Os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores" (STEWART, 1996).

O Triângulo de Sierpinski - também chamado de Junta de Sierpinski - é uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo. Ele é uma das formas elementares da geometria fractal por apresentar algumas propriedades, tais como: ter tantos pontos como o do conjunto dos números reais; ter área igual a zero; ser auto-semelhante (cada uma de suas partes é idêntica ao todo); não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado. Foi primeiramente descrito em 1915 por Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polonês.

Toma-se um triângulo equilátero de lado *l* e área A. Determina-se os pontos médios de cada lado e une-se esses pontos, obtendo-se assim, um novo triângulo equilátero de lado $l/_2$. Com isso, divide-se o triângulo inicial em quatro triângulos congruentes.

Retira-se o triângulo central e repete-se, em cada um dos triângulos restantes, as mesmas construções, obtendo-se os pontos médios e unindo tais pontos de modo a formar novos triângulos equiláteros, depois retirando os triângulos centrais. Assim, na segunda interação ter-se-á 9 triângulos, de lado $l/_4$. Este processo se repete indefinidamente, sendo que, a cada nova iteração, ter-se-á uma figura (tal como a Figura 1) com triângulos cada vez menores.

**Figura 1:** Triângulo de Sierpinski



Fonte: Wikipédia

Outro exemplo de fractais, relevante a este estudo por trazer aspectos do infinito é a curva de Koch, que segundo Sedrez (2009) é uma curva geométrica e um dos primeiros fractais descritos. Aparece pela primeira vez num artigo de 1906, de autoria do matemático sueco Helge von Koch. O mais conhecido Floco de neve de Koch (ou estrela de Koch) corresponde à mesma curva, tirando que se inicia a sua construção a partir de um triângulo equilátero (em vez de um segmento de reta).

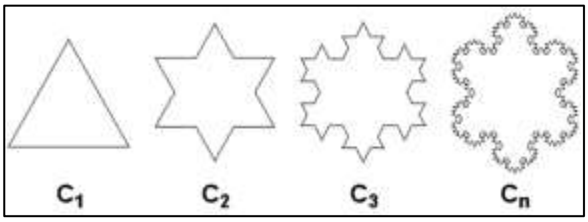
Para ser mais preciso, o foco de neve é constituído por três curvas de Koch, cada uma corresponde a um dos lados do triângulo equilátero de partida. Esta curva tem algumas propriedades notáveis. Apesar da curva ter comprimento infinito, ela delimita uma área finita.

A curva de Koch e obtida em estágios pelo seguinte processo:

i) No estágio 0, ela é um triângulo de lado 1.

ii) O estágio $n + 1$ é obtido a partir do estágio n, dividindo cada lado em três partes iguais, construindo sobre sua parte central um triângulo equilátero e suprimindo então a parte central. Sendo $P_n$ e $A_n$ respectivamente o perímetro e a área do *n*-ésimo estágio da curva de Koch. Na Figura 2 tem-se uma representação dos estágios de uma Curva de Koch.

**Figura 2:** Curva de Koch




Fonte: Sedrez (2009, p. 36)

Partindo para outros modos de evidenciar o infinito na geometria, pode-se destacar o clássico exemplo da conhecida *Trombeta de Torricelli*, que é uma superfície na forma de um funil (ou de trombeta). Ela começa larga e vai afunilando, sem nunca se fechar, ou seja, segue até o infinito, tal como pode-se ver na representação abaixo (Figura 3). A superfície da trombeta é infinita, mas o volume que ela envolve não é infinito.

**Figura 3:** Trombeta de Torricelli

Fonte: Wikipédia

Trombeta de Torricelli é uma superfície de revolução que se obtém girando a curva $y = \frac{1}{x}$ , com x [1; ∞), em torno do eixo das abscissas. Usando ferramentas do Cálculo temos que a área da superfície é dada por:

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{-1}{x^2}}\, dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3}\, dx$$

Portanto, área infinita.

Evangelista Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileu, foi o primeiro a pensar neste problema, que ele achou tão extraordinário que a princípio imaginou que tivesse feito alguma coisa errada. Outros filósofos e matemáticos ficaram tão perplexos com os paradoxos que surgiam com o infinito, que chegaram a propor o banimento da ideia.

## Concepções da Física sobre o infinito

A Física é uma ciência experimental, portanto observações consistem em medições que indiscutivelmente fornecem números como resultado final. Por exemplo, encontraremos medidas como: cem metros (100 m) de distância entre um ponto e outro, trinta e oito graus célsius (38°C) como a temperatura de uma pessoa com febre, etc. Por outro lado, a Física também faz uso de um corpo teórico para predizer observações, assim por exemplo, uma teoria sobre o futuro estado de temperatura de uma cidade precisa predizer números para a temperatura que devem coincidir com o que é observado.

Por outro lado, a Física é uma ciência não estática e ela vai mudando seus principais pressupostos e hipóteses como o passar do tempo. Na escala de tempo de vida de uma pessoa, essa mudança às vezes resulta imperceptível, e uma das consequências disso resulta no ensino da Física como um corpo de conhecimento já estabelecido e imutável. Um dos problemas que faz a Física avançar é a incompatibilidade das predições teóricas com as observações experimentais. Existe também um outro problema que revela as patologias de uma teoria, que é reconhecido quando em algumas condições a teoria se encontrar com grandezas infinitas. Isto além de ser uma problemática complicada para a Física é um motor que impulsiona a busca por uma descrição mais fundamental da natureza.

O infinito em Física se apresenta de diversas formas e pode inicialmente ser percebido quando fazemo-nos perguntas sobre a sua natureza. O espaço é infinitamente divisível? O universo e o espaço associado a ele é infinito? A matéria é infinitamente divisível? Qual é relação entre o infinito da Matemática e o infinito físico? Muitas destas questões ainda não têm resposta definitiva e são objeto de intensa atividade científica. É possível que uma teoria mais fundamental da Física implique também a existência natural do infinito e, portanto, o que antes nos parecia um problema era, na verdade, uma resposta.

No estado atual do conhecimento, o problema da divisibilidade infinita do espaço tem encontrado novas possíveis repostas devido ao avanço de resultados empíricos e teóricos na gravidade quântica de laços, teoria de cordas, geometria não comutativa. O espaço como é percebido por nós no dia a dia, se apresenta como um recipiente no qual os objetos são localizados. Newton entendia o espaço da mesma forma, para ele existia um espaço contínuo e sem propriedades dinâmicas, com respeito ao qual tudo poder-se-ia localizar. Para Newton este espaço era contínuo e infinitamente divisível. Não existia evidência experimental do contrário. A pergunta sobre a infinita divisibilidade do espaço ganha força depois dos dois maiores avanços da Física do século XX: a Mecânica Quântica (MQ) e a Teoria da Relatividade Geral (TRG). Estas duas teorias resultaram ter grandes aplicações e foram confirmadas em um grande número de experimentos. Porém as hipóteses principais de ambas teorias se contradizem mutuamente. Na TRG o espaço é contínuo e possui propriedades dinâmicas. Para descrever essa dinâmica a TRG utiliza um campo chamado de métrica, o qual em termos práticos permite calcular distâncias. Por outro lado, a MQ diz que todo campo deve ser quantizado, e, portanto, se conclui que deve existir uma distância mínima, o que termina em contradição com o espaço contínuo da TRG. Então se existir uma teoria mais fundamental, que unifique a TRG e a MQ, ela também deve trazer uma descrição do que acontece com espaço em escalas muito pequenas, e, portanto, mostrar-nos se ele é infinitamente divisível.

Em contrapartida com a discussão anterior, iremos ver que a possibilidade do espaço ser infinito tem sido um tema de preocupação por muitos anos. Já o filósofo grego Archytas de Tarentum propôs um argumento no qual ele conclui que o espaço se estende infinitamente. Archytas disse que se ele chegasse na beira do céu, ele pode estender a sua mão já que não existiria uma parede bloqueando-a e, portanto, o espaço continuaria. Mas se existe alguma parede bloqueando a mão então isso quer dizer que existe espaço além da beira, já que a parede precisa de espaço para existir. Por tanto para ele o espaço continua indefinidamente. Uma tentativa de solução a este problema provém da Cosmologia moderna, a qual usa como ferramenta principal a TRG e fornece uma possível solução: o espaço, em grande escala, pode não ter fronteiras, mas pode ser finito (HELLER; HUGH WOODIN, 2011).

Na discussão do espaço, intencionalmente deixamos de lado a existência da matéria que se move nele. Os filósofos pré-socráticos acreditavam que a matéria estava composta por quatro elementos (água, terra, ar e fogo) e que um corpo poderia ser analisado e decomposto nesses elementos fundamentais. Leucipo propôs que a matéria na verdade estaria composta por mínimos elementos fundamentais chamados átomos, mas com o passar do tempo a ideia de átomo ficou esquecida. No século XX foram realizadas descobertas sucessivas, baseadas em experimentos que demonstraram a existência dos átomos, mas também demonstrou-se que estes são constituídos por partículas menores, o próton, nêutron e elétron. Os cientistas ainda mais curiosos se fizeram a pergunta: será que essas partículas são compostas de partículas ainda menores? Assim se iniciou uma corrida científica e foram construídos aceleradores de partículas para encontrar a resposta.

Nos dias atuais sabemos da existência de grande quantidade de partículas muito menores que o átomo. Por outro lado, existe um outro problema também associado a pergunta da indivisibilidade da matéria. A Física de partículas padrão entende os objetos como puntiformes (sem dimensão), mas isso leva a dificuldades intrínsecas da teoria. Se uma partícula de massa *m* não tem dimensão e esta partícula se entende como uma pequena esfera de raio *r*, a densidade de massa dela pode ser calculada como $\rho = 3m\ /\pi r^3$. Então quando se calcula a densidade de massa dela obteremos um número infinito quando $r$ se aproxima de zero. Isto parece ter novamente conexões com a geometria, neste caso com a geometria do corpo que se move no espaço. Vemos então que a Física de partículas encontra problemas com infinitos quando ela precisa calcular algumas grandezas importantes (HELLER; HUGH WOODIN, 2011).

Como foi visto, uma teoria Física mais fundamental deveria trazer resposta sobre a existência do infinito na natureza Física, e talvez, a relação com infinito na matemática. Como é entendido de forma matemática o infinito não é simplesmente um número muito grande, o infinito é inatingível. Na Física o infinito também nos apresenta uma dualidade com o zero ( $\lim_{r\to 0} \rho = \infty$, para comportamento a densidade de massa ρ, citada acima, quando $r$ se aproxima de zero), portanto se na natureza demonstra-se a inexistência do infinito concluiremos que o zero também não existiria. Uma evidência da não existência de um zero na natureza estaria relacionado com o vácuo, o qual segundo a teoria quântica de campos, sabemos que não é realmente vazio. Em Física normalmente se encontram dois tipos de infinitos, $(\infty)_{VL}$ (VL do inglês very large) que é o infinito usado para representar um número muito grande e $(\infty)_{ESS}$ (ESS do inglês essential) como o infinito inatingível (HELLER; HUGH WOODIN, 2011) Em cálculos físicos o infinito do primeiro tipo é rotineiramente usado como um limite de números muito grandes mesmo sabendo que na natureza pode existir (ou não) o infinito do segundo tipo. A natureza do infinito do segundo tipo pode ser representada pelas relações seguintes, nas quais $a$ e $b$ são números:

$$(\infty)_{ESS} + a = (\infty)_{ESS}$$
$$b \text{ x } (\infty)_{ESS} = (\infty)_{ESS}$$

Por outro lado, o seu dual, o zero, é caracterizado pelas relações

$$(0)_{ESS} + a = a$$
$$b \text{ x } (0)_{ESS} = (0)_{ESS}$$

Também como dual à $(\infty)_{VL}$ pode-se propor $(0)_{VS}$ (vs do inglês very short), que serve para representar um número muito pequeno na Física. Portanto temos visto que o infinito e o zero em Física são representados por um número muito grande e um número muito pequeno, e entende-se que a existência (ou não) do infinito e do zero essencial na natureza, deveria ser demonstrada. Como discutido previamente, evidências da inexistência de um zero essencial ou dito de outra forma da não divisibilidade infinita do espaço, são fornecidas pelas teorias que tentam unificar a TRG com a MQ. Por outro lado, a TRG quando aplicada ao Universo mostra que o espaço pode ser finito, o que mostraria a inexistência de um infinito essencial na natureza.

**Explicitando um olhar filosófico ao infinito**

Como se pode verificar na contribuição de Cantor, o olhar lançado ao objeto *infinito* foi ao longo do tempo configurando e desconfigurando concepções matemáticas. Também é possível fazer a mesma afirmação às concepções filosóficas. Por exemplo, Torricelli ao visualizar um sólido ilimitado, portanto infinito, porém, com volume finito, faz questionar-se a Filosofia Empirista, que trabalha com um espaço real sobre o qual se faz experimentações: dado este espaço, como pode conjecturar-se como real um sólido infinito? Sobre indagações como esta, Silva (2007, p. 84) afirma que: "o que é contraditório para as grandezas finitas pode ser da própria essência das grandezas infinitas; o que repugna a nossa intuição finita pode ser a verdade do infinito".

Na Matemática muito se vale das concepções de *infinito potencial* e de *infinito atual*, para explicitar a incomensurabilidade de grandezas e quantidades. Platão (428 – 347 a. C.) e Aristóteles (384 – 322 a. C), admitem o *infinito potencial*, em contraposição ao *atual*. Como premissa da geometria aristotélica tem-se que não podemos conhecer os objetos posteriores que não derivem de elementos primeiros. Portanto, tais objetos estão em possibilidade de *vir a ser*, quando observados elementos de sua constituição, característica esta que define o infinito potencial. Nessa perspectiva, Reis *et al*. (2010) explicita que Aristóteles, em *O Tratado do Infinito*, Física III, entende como absurdo pensar o infinito como *o que contém*, visto que em sua compreensão, isto, por si só, lhe imporia limites, dando-o caráter de totalidade em ato (*infinito atual*). Aristóteles afirma o infinito *como o que está contido*, aquilo além do qual sempre há algo: isto é, o infinito. Se aderida a ideia de completude ou de um todo, eles seriam em potência (*sempre* num horizonte).

Com outro olhar, focando a qualidade e não a quantidade, a Filosofia se volta, também, ao *infinito absoluto*, com o qual se pensa um dos principais empregos do infinito no âmbito filosófico: a ideia de Deus. Com esse olhar a Filosofia abarca em suas discussões a humanidade, pois assim como com o estudo da finitude pode-se ir vislumbrando o infinito matemático, o homem em sua vivência percebe seus defeitos e/ou qualidades na presença do outro, que na perspectiva cristã é a própria imagem e semelhança de Deus, um ser perfeito, divino.

No parágrafo anterior um questionamento se impõe: é o infinito construído a partir de partes que se possam articular e projetar, ou é a existência do infinito que permite pensar partes que o constituem? No âmbito do desenvolvimento da lógica, que constrói o objeto matemático evidenciando um processo, é a primeira situação que prevalece. Esta seria também a conclusão de Kant, para quem a noção de infinito se põe como um ideal da razão e engloba todas as relações. Aristóteles diria que o infinito se faz presente mais no conceito (*logos*) do que no todo. Se o todo diz do inteligível e incognoscível, seria absurdo creditar a ele (enquanto incognoscível) a possibilidade de definir coisa qualquer.

Já Descartes afirma ver mais "realidade" na substância infinita do que na finita. Explicita tal entendimento focando o homem, que de alguma maneira tem de si a noção de infinito anteriormente à do finito, isto é, de Deus antes de si mesmo. Expõe como estranho seria se o homem pudesse conhecer que duvida e que deseja, e que, portanto, lhe falta algo, não sendo assim inteiramente perfeito, se não tivesse nele a ideia de um ser mais perfeito. Se não fosse assim "em comparação ao qual eu conheceria as carências de minha natureza? E isto não deixa de ser verdadeiro, ainda que eu não compreenda o infinito... pois é da natureza do infinito que minha natureza, que é finita e limitada, não possa compreendê-lo" (DESCARTES, 1973, p. 31).

Lévinas (1988), valendo-se da compreensão de Descartes, porém apenas em seu esquema formal, expõe sua ideia de infinito, pautada na experiência *face a face* entre um *eu* e *outrem,* um ser absolutamente outro (entendido por Lévinas como o próprio infinito) que assim como o Deus em Descartes, também não se alcança a totalidade, porém, agindo à sua própria liberdade, cuja filosofia primeira é a ética, o *eu* pode ir conhecendo, transcendendo *face a face* o que o *outrem* emana, ao passo que vislumbra o por vir, movido pelo desejo do invisível ou do metafísico (que tende para a coisa totalmente outra, para o "absolutamente outro"). "O infinito no finito, o mais no menos que se realiza pela ideia do Infinito, produz-se como Desejo. Não como um Desejo que a posse do Desejável apazigua, mas como Desejo do Infinito que o desejável suscita, em lugar de satisfazer" (LÉVINAS, 1988, p. 20).

Estar *face a face* com *outrem* é adentrar em uma infinitude de possibilidades, dadas as perspectivas variadas, a diversidade de situações e posições em que se está inserido no tocante à percepção, ao meio social, ao meio sociocultural, histórico ou religioso. A percepção abre uma infinidade de aspectos perceptíveis e reflexivos, dados pela subjetividade de cada um, levando a compreensões diversas, que dependem de ações individuais e coletivas. Com isso, na subjetividade, conforme Lévinas (1988), também se expõe a ideia de infinito, uma vez que ela ao apreender algo, deixa muito a ser apreendido. São outros olhares, outras perspectivas, outros modos de ser e estar que fazem uma experiência sempre inacabada, pois sempre haverá algo não visto no que se está a ver. Assim, com o filósofo, entende-se que na subjetividade habita o *outrem,* habita o infinito.

Em Lévinas (1998, p. 22), entende-se que o infinito não pode ser dito em termos da experiência objetiva, pois ele escapa ao pensamento de quem tenta ele apreender. Há assim um transbordamento que produz a sua própria *infinição* (infinitude do infinito); "ele não existe antes para se revelar em seguida. Sua infinição se produz como revelação, como inserção em mim de sua ideia", ou seja, é a infinição que se mostra ao *eu* no fluir da experiência com *outrem.*

Na experiência *face a face* o infinito não se expressa só no *outrem*. Se o *eu* na percepção da infinição que se mostra nessa experiência vislumbra no *outrem* o infinito, pode vislumbrar a infinitude também em si, pois "vejo no outro um reflexo das possibilidades que a mim também se abrem, vejo nele modos de realizar movimentos intencionais que podem fazer parte dos modos pelos quais me coloco em ação (PINHEIRO, 2018, p. 37). Assim, visando *outrem,* o sujeito pode encontrar-se, porém, encontrar-se diferente, uma vez e outra vez, a cada variação na perspectiva sobre a qual realiza a busca. Disso, entende-se que a intencionalidade para/com *outrem* constitui um comportamento que tem uma conotação intersubjetiva. Essa consciência de si, permite ao *eu* uma virada no olhar, compreendendo-se agora como *outrem*, sendo também visado como fenômeno[6], e como tal, não se apresenta como ser acabado, mas como unidade cuja incessante busca/desejo não permite conhecer a completude.

Ampliando essa ideia de busca, trazendo agora o mundo como fenômeno, no âmbito da fenomenologia husserliana, pode-se articular sobre a constituição do conhecimento, para a qual essa vertente filosófica solicita uma suspensão das teses que já dão o mundo em seu acabamento, antes mesmo de se vivenciar suas singularidades. Para Husserl (2006), ao se colocar essas teses entre parênteses, o mundo *é* em seu modo de mostrar-se, e o conhecimento que se constitui dá-se no âmbito de sua plenitude, como ser absoluto e subjetivo. Vive-se "agora inteiramente nesses atos de reflexão, cujo dado é o campo infinito do conhecimento absoluto" (HUSSERL, 2006, p. 118).

Nessa perspectiva a constituição do conhecimento, a percepção, a reflexão, e todos os

[6] Fenômeno é o que se mostra no ato de intuição efetuado por um sujeito individualmente contextualizado, que olha em direção ao que se mostra de modo atento e que percebe isso que se mostra nas modalidades pelas quais se dá a ver no próprio solo em que se destaca como figura de um fundo. A figura, delineada como o fenômeno e fundo, carregando o entorno em que o fenômeno faz sentido (BICUDO, 2012, p. 30).

atos da consciência estão amalgamados ao fluxo da vivência, que é temporal e espacial. Todas as vivências estão numa esfera de liberdade fluente aberta desde o campo temporal, pois deslizam entre os horizontes infinitos de passado, presente e futuro, sendo esses sempre vivos.

Na imediaticidade da vivência, um sujeito dá-se conta de estar vivenciando momentos que estão entrelaçados uns aos outros em uma *unidade dinâmica*. Nessa imediaticidade, ele não se preocupa com o início e fim de um momento, sabe que eles se entrelaçam e deslizam entre si, mas não visualiza as amarras desse entrelaçamento. Assim, o sujeito não vivencia um momento ou outro (como pontos que vão se justapondo), mas o fluxo dos mesmos, que evidencia uma *duração*, um contínuo e um modo de ser do infinito (PINHEIRO, 2018).

Husserl (2006, p. 187) compreende o fluxo de vivência como "unidade infinita, e a forma do fluxo é uma forma que abrange necessariamente todos os vividos de um eu puro – com diversos sistemas de formas". E, assim como no âmbito da Matemática historicamente vem se interrogando a completude e os limites do infinito, a fenomenologia husserliana também propõe uma busca, ao indagar: é possível abarcar a totalidade do fluxo da vivência?

Em *Ideias*, Husserl dá elementos para se pensar tal indagação, dando-se conta do limite da visada reflexiva. Expõe que um olhar direcionado "atinge um vivido qualquer em reflexão, e em apreensão perceptiva, subsiste a possibilidade a priori de dirigir o olhar para outros vividos, até onde haja nexo entre eles. Por princípio, entretanto, todo esse nexo jamais é algo dado ou a ser dado por um único olhar puro" (HUSSERL, 2006, p. 188).

Husserl (2006), explicita que esta unidade absoluta, que é o próprio fluxo da vivência, só pode ser apreendida reflexivamente se tomada como *ideia*, tal como entendida na filosofia kantiana, na *progressão ilimitada* desta, cuja implicação se relaciona a um constante *progresso ao infinito* e a um *progresso ao indefinido*.

> A ideia não se deixa efetivar integralmente porque ela é uma esfera essencialmente aberta, é uma estrutura de puras possibilidades de realização, portanto, não pode ser realizada totalmente, pois, se fosse integralmente efetivada deixaria de ser idealidade, perderia seu caráter ideal para ser, então unicamente uma realidade. É justamente por a ideia ser abertura de possibilidades a serem realizadas que ela é a meta do esforço empreendido em cada realização do *ego* (THOMÉ, 2009, p. 160).

.

A captação dessa ideia, compreende-se em Husserl (2006, p. 123), que só poderia vir a ser realizada por captações parciais. Do mesmo modo dar-se-ia a captação reflexiva da unidade do fluxo de vivências, pois aquilo que se pretende apreender com o olhar reflexivo, sempre escapa a este olhar, sendo, portanto, unicamente uma ideia, mais ainda, uma ideia que "veicula em si mesma um caráter infinito e indefinido: é uma ideia essencialmente ilimitada, inapreensível e indeterminável na totalidade das suas possibilidades".

Enquanto *progressão ao infinito*, a ideia aponta para uma totalização, um *todo* que é anterior e fundante das partes. Em Husserl (2006), esta totalidade configura-se como o horizonte de vivências. Enquanto *progressão ao indefinido* a ideia indica a abertura desse horizonte, que se mostra sempre aproximado, visível, porém, nunca completamente abarcado pelo olhar de quem o visa.

Quando se busca dizer de experiências vivenciadas, detalhes vão se "escondendo" ou constituindo compreensões mais generalizadas. Fica posta a impossibilidade de trazer pela lembrança e relatar a totalidade desse horizonte, do fluxo da unidade infinita de vividos. Porém, "pela atitude assumida mediante o olhar, podemos destacar unidades dentro do fluxo, focando-se e adentrando em compreensões mais profundas dessas vivências" (BICUDO, 2012, p. 89). São momentos que se evidenciam no âmbito da narrativa do sujeito, que se expressa a propósito de uma indagação posta no momento presente. Ao relatar, esse sujeito traz momentos lembrados como *flashes*, que vão fazendo sentido no movimento da lembrança.

**Dando conta da interrogação: a *intuição de infinitude* como um estruturante do conceito de infinito e possibilidades que ela abre ao ensino e aprendizagem desse conceito**

Focando neste estudo o infinito como fenômeno visado, na concepção husserliana, pode-se entender que ele "possui sua *especificidade*, ele é composto de *predicáveis* essenciais que têm de lhe ser atribuídos (enquanto ele é como é em si mesmo), a fim de que outras determinações secundárias, relativas, lhe possam ser atribuídas" (HUSSERL, 2006, p. 35). Para Husserl, a essência de um fenômeno interrogado é o "invariante do percebido, sujeito a reduções e materializado pela linguagem, portanto histórica e culturalmente presente no mundo-vida" (BICUDO, 2012, p. 20).

Para explicitar *o que se evidencia como invariante entre teorias que propõem reflexões e que definem o infinito, e como este invariante se expõe em situações de ensino e de aprendizagem*, traz-se neste tópico um pensar sobre essa essência, enquanto invariante, ou estruturante do fenômeno investigado: o infinito. Nos estudos realizados e com a retomado dos tópicos anteriores, compreende-se que no âmbito das diferentes visadas, quais sejam: da Matemática, da Física e da Filosofia, algo que se mostra como um entre os invariantes possíveis em seus discursos é a *intuição*[7] *da infinitude* (ou intuição da *infinição*, como em Lévinas), sem a qual entende-se não ser possível dizer ou definir o infinito, e sem a qual não ter-se-ia instituída tal definição.

Quando na Matemática se expõe o infinito de composição, matematizando o aumento ilimitado de números na reta numérica, por exemplo, ou os infinitésimos, explicitando a divisibilidade nas curvas de Koch ou no paradoxo de Zenão, ou quando na Física se explicita o infinitamente grande $((\infty)_{VL})$, como na expansão do universo, ou o infinitamente pequeno $((0)_{VS})$, como no estudo das partículas subatômicas, há uma percepção de processo, sobre a qual se faz inferências, e a cada nova percepção vai se constituindo a intuição do ilimitado e, por sua vez, da infinitude, seja ela numa tendência expansiva ou de redução. É na presença desta intuição e expressando-a matematicamente ou fisicamente que se pode expor o infinito de modo formal.

Segundo Morris (1998) o conceito de infinito foi discutido e reformulado ao longo do tempo, sendo além de uma questão lógica, uma questão de imaginação. Com isso, compreende-se que mesmo a Matemática, também parte de noções intuitivas que se manifestam mediante imaginação, compreendida aqui como ato intencional (HUSSERL, 2012), necessário às mais diversas conjecturas matemáticas. Sobre a atividade do Geômetra, por exemplo, Husserl (2006, p. 153) afirma que na imaginação, “ele tem a liberdade inigualável de reconfigurar como quiser as figuras fictícias, de percorrer as formas possíveis em contínua modificação e, portanto, de gerar um sem-número de novas construções; uma liberdade que lhe franqueia acesso às imensidões das possibilidades eidéticas”. Assim, a imaginação, além de atribuir caracter infinito às coisas pensadas, é ela mesma infinita.

Nessa liberdade imaginativa o mesmo Geômetra citado acima pode pensar a infinitude de duas retas paralelas, cujo invariante da relação entre elas é que nunca se cruzam, segundo Euclides. Quando associada a uma destas retas a ausência de buracos ou de saltos, intuitivamente está-se fazendo conjecturas sobre o modo de *ser contínuo* que ela expressa, sendo que buracos e saltos não são propriamente entes matemáticos. Pela percepção dessa ausência, na imaginação faz-se uma projeção, tomando-se como invariante a *continuidade* (qualidade do *contínuo*) na infinitude da reta. Quer-se com isso explicitar que na variação imaginativa, possível pela liberdade que a constitui, alguns invariantes podem ir se mostrando, que por sua vez vão gerando intuições, que ao serem expressas, discutidas,

[7] Aqui entende-se intuição assim como Husserl (2012, p. 50), como o pensar do pensamento, que se anuncia “como o que nele é visado, como meta do pensamento, atingida de uma maneira mais ou menos perfeita”, o que solicita um movimento de explicitação e análise, para melhor compreendê-la.

articuladas e repetidas, podem constituir-se como conhecimento socio-culturalmente instituídos.

Portanto, entende-se que a *intuição de infinitude*, bem como as noções que dela surgem, não se consolidam como algo às margens do conceito de infinito, mas como seu estruturante. Aqui se assume que a percepção, que abre horizontes à intuição mediante atos imaginativos, é solo sobre o qual avançou e se constituiu todo e qualquer conhecimento já produzido (MERLEAU-PONTY, 2011), dentre os quais se destaca aqui os matemáticos, que embora sejam apresentados numa linguagem simbólica científica, originalmente deram-se no âmbito perceptivo e intuitivo, que conduziu o pensar e os primeiros gestos de explicitação, como nos primeiros "rabiscos" e rascunhos dos antigos e dos contemporâneos matemáticos e cientistas.

Assim, entende-se que as ciências formalizam numa linguagem lógica aquilo que se é percebido numa experiência genuína com o mundo de vivências. Por exemplo, conceitos como distância, profundidade, espaço, área, contínuo e infinito, dentre outros, antes de serem expressos como entes matemáticos, foram vivenciados, percebidos e intuídos pelos pensadores aos quais se credita tais formalizações (PINHEIRO, 2018).

Uma vez destacada a *intuição de infinitude* como um invariante na explicitação de diferentes teorias que versam sobre o infinito, como constituinte e como solo sobre o qual se estrutura o conceito de infinito, pode-se pensar agora na apresentação desse conceito, de modo que seja compreendido, podendo ser assimilado e também expresso por quem o compreendeu. Este olhar sugere um direcionamento para situações de ensino e de aprendizagem do conceito de infinito, dando com isso continuidade à explicitação sobre a interrogação deste estudo.

A virada no olhar, que agora foca o ensino, encontra como referência o campo da Educação Matemática, no qual buscou-se pesquisas que tenham tematizado o infinito como objeto do ensino e da aprendizagem. Como primeira constatação, vê-se que a temática é pouco discutida neste campo, o que amplia a relevância deste trabalho, por situar-se no mesmo e por trazer não só aspectos matemáticos, mas também físicos e filosóficos sobre o infinito.

Nessa perspectiva, Mendes *et al*. (2017, p. 249), direcionados à disciplina a nível superior, o Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente aos conceitos de Análise Real, sugerem que cabe ao professor, ao tratar do tópico *infinito*, propor atividades que favoreçam inicialmente o processo intuitivo, abrindo oportunidade ao ato de explorar e "organizar matematicamente situações que sejam 'realizáveis', para que guiados por esse professor, os estudantes possam construir conceitos formalizados referentes aos tópicos do curso de Cálculo Diferencial e Integral”. Para os autores (2017, p.248), essas atividades devem vir acompanhadas de questionamentos como: “‘Pode um infinito ser maior que outro?’; ‘Quanto é infinito mais um?’; ‘Há mais números racionais ou irracionais?’; ‘O que caracteriza um conjunto infinito?’; ‘Posso ordenar os elementos de um conjunto infinito?’”.

Como proposta pedagógica, Mendes *et al.* (2017) propõe a apresentação do paradoxo do Hotel de Hilbert. Em seu estudo, a faz contextualizando o paradoxo à situação da construção de dois hotéis, com infinidade de quartos (enumerados por números naturais), para hospedar turistas que viajaram para assistir a Copa do Mundo de 2014, que aconteceu no Brasil.

Essa é uma proposta com a qual os alunos podem compreender a correspondência de cada número natural a um quarto e, se o número de quartos é infinito, a quantidade de números naturais também é. Esta é uma compreensão prévia com a qual o professor possa apresentar, por exemplo, a definição: “Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito. Assim, é infinito quando não é vazio e nem existe, seja qual for, uma bijeção $f\!: I_n \rightarrow X$, $I_n = \{p \in \mathbb{N};\ p \leq n\}$” (LIMA, 2001, p. 5).

Uma vez construída a noção intuitiva de infinito com o estudo das possibilidades no paradoxo do Hotel de Hilbert, Mendes *et al*. (2017), compreendem que criasse um campo mais propício para se trabalhar com raciocínio lógico-matemático, tal como o exigido para construção dos Racionais, em Cantor. Na compreensão formulada de que há infinitos de elementos distintos, porém, com quantitativamente iguais (números naturais e quantidade de quartos), não será totalmente estranho aos alunos, a afirmação de Lima (2001, p. 5) de que “a infinidade dos números racionais não é maior do que a dos números inteiros”, mas igual (no sentido de possuírem a mesma cardinalidade). Tal compreensão permite também um direcionamento ao explicitado por Lima (2001, p.6): “um conjunto é infinito se, e somente se, ele contém outro conjunto diferente dele mesmo, e estabelecer uma correspondência bijetora com uma de suas partes próprias”.

Partindo do mesmo princípio que Mendes *et al.* (2017), Monteiro (2004, p.1), mesmo entendendo que não se tem experiência direta com o infinito (por entender que sua compreensão só se dá a níveis de abstrações), desenvolve seu trabalho objetivando “mostrar porque as abordagens do conceito de infinito são importantes na construção do pensamento dos seres humanos da atualidade podendo refletir inclusive na percepção de mundo”. Como proposta, a autora apresenta o paradoxo Dicotomia, de Zenão, como instrumento didático para se abordar o conceito de limites, infinito e de infinitésimo na educação básica.

Delfino (2015, p. 61) entende que o infinito potencial "é a forma mais intuitiva de idealizar o infinito", com isso, expõe como proposta de ensino, iniciar a explicitação do infinito a partir desta concepção. Com a mesma proposta Pimentel *et al*. (2010) apresenta a seus sujeitos de pesquisa, assim como feito por Monteiro (2004), releituras do paradoxo Dicotomia, lançando junta a elas indagações:

> *A lâmpada de Thompson*: uma lâmpada é acesa por um minuto e se apaga e depois de meio minuto ela se acende, decorrido um quarto de minuto ela se apaga novamente e, depois de um oitavo de minuto, ela se acende, após um dezesseis avos de minuto ela se apaga, e assim sucessivamente. Quando se passarem dois minutos, a lâmpada estará acesa ou apagada? -*O Arqueiro e o alvo:* Um arqueiro, ao tentar acertar o alvo, percebe que está muito longe dele e divide sua distância ao meio. Ainda não contente, a divide de novo e de novo, aproximando-se cada vez mais do alvo. Quantas divisões serão necessárias para que a flecha e o alvo se encontrem? (PIMENTEL *et al*., 2010, p. 56).

Entende-se que com tal abordagem inicial, valendo-se pedagogicamente do paradoxo de Zenão, pode-se abrir possibilidade para que, em um momento posterior, os alunos possam melhor compreender a variável $1/_{n}$, designada por *infinitésimo principal*, quando *n* tende para infinito. Da mesma forma, pode entender que, tendo *n* o mesmo comportamento, *f*(n) = $1/_{2^n}$ também é infinitésima. Ainda, quando se abordar a sucessão enumerável *an = f(n),* aqui definida como infinitésima, poder-se-á visualizar que *an = f(n)* se aproxima de zero quando *n* tende ao infinito, o que abre o campo para estudo do conceito de limite.

Leal Junior e Pinheiro (2018), numa abordagem ao Cálculo Integral, propõem o uso de software para ampliar e reduzir a quantidade de retângulos, bem como a largura dos mesmos ($\Delta$x), para cálculo da área sob uma curva dada. Como implicação dessa experiência, os sujeitos de pesquisa (alunos de pós-graduação em Educação Matemática) concluíram que esta área poderia ser interpretada como a soma das áreas de infinitas fatias retangulares de larguras infinitamente pequenas. Dessa forma, intuitivamente, e por exploração, os autores introduziram os conceitos de limites, somatório, infinito e, articulando todos eles, introduziu-se o conceito de Soma de Riemann.

Na esteira das propostas em Educação Matemática aqui citadas, outros pesquisadores da mesma área, como Amadei (2005) e Fischbein (2001), apontam para o ensino e aprendizagem do conceito de infinito e dos que dele se valem, a partir de variados níveis de abstração, visando a percepção intuitiva de processo, ou seja, percepção do movimento que vai constituindo a *intuição de infinitude* nos fenômenos aos quais o infinito possa ser associado, como tempo, espaço, movimento, paradoxos matemáticos, etc. O pensamento "matemático moderno, adotando uma relação dinâmica com relação ao conceito de infinito, torna-o elemento de construção, obtendo-se o resultado que a experiência confirma" (CARAÇA, 2002, p.236).

Por já ter-se aqui enfatizado a *intuição de infinitude* como invariante no âmbito das explicitações de teorias que pensam o infinito, e por entender que questões de ensino desta temática constituem também modos de explicitá-la, entende-se que as teorias e a situação de ensino não são estanques, o que corrobora a compreensão de que também mostra-se como invariante nestas situações de ensino, a proposta da *intuição de infinitude*. Há uma preocupação em estimular à percepção de processos contínuos valendo-se de linguagem matemática associada a situações observáveis, construindo as condições outras abordagens matemáticas podendo-se acrescentar às descrições iniciais dos fenômenos, modelos matemáticos correspondentes. Constitui-se assim o ensino e aprendizagem como movimento da percepção à formalização matemática, que perpassa a intuição, reflexão, organização, síntese e explicitação.

Embora não há nos trabalhos acima apresentados uma proposta inversa, entende-se que outras propostas de ensino possam apresentar a formalização e buscar compreendê-la (tendo-a sempre como fundo da análise) a partir de observações de situações problemas, de modelagem, de contextualização, do estudo da natureza, etc.

Como este trabalho expõe, em sentido de abertura, as noções de infinito, não se pretende aqui enfatizar que são apenas estas as abordagens possíveis. Há tantos professores, tantas ideias, há tantos modos pelos quais o aluno aprende, ou não aprende, o que inviabiliza a predeterminação de uma quantidade de possibilidades de ensinar sobre infinito, e mais ainda, afirmar que uma é melhor ou pior que outra.

## Tecendo outras considerações

Este estudo, nas compreensões trazidas pelos autores, retoma o infinito no âmbito de diferentes perspectivas, para com isso estudar o que se mantém, o que se mostra invariantes nos discursos que nelas se constituem. Compreende-se que, em meio às variações formais e epistemológicas, a *intuição de infinitude* mostra-se como um ponto de interseção entre o discurso matemático, físico e filosófico. No decorrer do texto, articula-se que, se inserida a perspectiva do ensino e aprendizagem, o mesmo ponto se destaca, como proposta didática para constituição de conceitos mais abstratos de infinito e de conteúdos matemáticos aos quais o mesmo está inserido.

Este estudo, mesmo focando uma temática específica, sugere de modo amplo possibilidades ao ensino de Matemática. Em especial, sugere-se uma retomada das experiências intuitivas, buscando uma aprendizagem que se dá na transição que flua entre a intuição e o cientificamente posto, valorizando também a vivência dos alunos, dando-lhes a oportunidade de "ter em mãos", "tocar", "ver", um conceito matemático, uma propriedade e ela em movimento de configuração, sendo que esse movimento seja realizado pelo sujeito da aprendizagem, o aluno.

Com isso, o infinito não seria apenas uma ideia expressa e trazida tradicionalmente pela cultura em livros e manuais, mas também, elemento presente e passível de ser "vivenciado", no vislumbre que a *intuição de infinitude* permite.

Esta compreensão sugere um olhar mais dinâmico às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real, postas como historicamente organizadas e estruturadas, de modo que o conteúdo ocupa um lugar próprio e estático em suas ementas e programas. Se se direciona um olhar interrogador a essas disciplinas, vê-se que são historicamente construídas a partir de problemas da humanidade e, desta forma, têm como solo constituinte o mundo das experiências e da intuição. Mostra-se como proposta epistemológica um retorno a este mundo constituinte, aos atos perceptivos, às intuições primeiras, aos desafios, para que o ensino e a aprendizagem transcendam a mera memorização de definições agora instituídas, mesmo que se entenda que propostas de memorização sejam também importantes no âmbito da Matemática.

Faz-se aqui, não considerações finais, mas propostas como abertura a um horizonte de possibilidades. Da mesma forma, não se afirma que a discussão sobre o infinito está completa. Mesmo que, se hipoteticamente este texto abarcasse toda a produção humana sobre o infinito, ainda assim faltaria o *por vir*, por entender-se que a Matemática, a Física, a Filosofia e qualquer área que queira abordar o infinito, potencialmente, ainda têm infinitas coisas a dizer sobre o mesmo. Essa compreensão desautoriza qualquer tentativa lógica de síntese totalizante.

**Referencial Bibliográfico**

AMADEI, F. L. **O infinito:** um obstáculo no estudo de Matemática. 112p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica (PUC), São Paulo, 2005.

ANDRADE, M. G. C. A. Um breve passeio ao infinito real de Cantor. In.: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 5, 2010, Paraíba. **Anais...** Paraíba: SBM, 2010, p. 1 – 10.

BICUDO, M. A. V. A constituição do objeto pelo sujeito. *In*: TOURINHO, C. D. C. (Org.).

**Temas em Fenomenologia**: a tradição fenomenológica-existencial na filosofia contemporânea. 1 ed. Rio de Janeiro: Booklink, 2012. p. 77-95.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**, Lisboa,6 ed, Gradiva, 2002.

DELAHAYE, J. P. **O infinito é um paradoxo na matemática?** Scientific American Brasil Especial: As diferentes faces do infinito. n. 15, p. 15-23, 2006.

DELFINO, H. S. **O conceito de infinito:** uma abordagem para a educação básica. 78p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015.

DESCARTES, René. **Meditações.** Trad. J. Guinsburg e Bento Prado Júnior. São Paulo, Abril Cultural, 1973.

DOURADO, T. A. S. **Uma brevíssima história dos infinitos**. Gazeta de Matemática, Lisboa, n. 177, p.40 – 47. nov. 2015.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FISCHBEIN, E. Tecit models na infinity. Educational Studies in Mathematics. **International Journal**, v. 48, n.2 e 3, 2001, p. 309 – 329.

HELLER, M; HUGH, W. W. **Infinity, New Research Frontiers.** Ed. Cambridge University Press, 2011.

HOUAISS. **Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa.** Editora Objetiva. Versão 2.0a, abr. 2007.

HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental:** uma introdução à filosofia fenomenológica. Trad. Diogo Falcão Ferrer. 1 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

HUSSERL, E. **Ideias para uma Fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica**: introdução geral à fenomenologia pura/Edmund Husserl. Trad. Marcio Suzuki. 5 ed. Aparecida Ideias & Letras, 2006.

LEAL JUNIOR, L. C.; PINHEIRO, J. M. L.. Modos de compreender a Soma de Riemann e suas aplicações ao estar em um ambiente informatizado de aprendizagem. **Unión (San Cristobal de La Laguna)**, v. 1, p. 23, 2016.

LÉVINAS, E. **Totalité et infini:** essai sur l’extériorité. Paris: Kluwer Academic, 1988.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Vol. I. Coleção Matemática Universitária (IMPA). Rio de Janeiro, 2001.

MENDES, M. T. *et al*. O conceito de conjunto finito e infinito por meio de tarefas: uma proposta à luz da educação matemática realista. **VIDY***A*, Santa Maria, v. 37, n. 1, p. 239-252. 2017.

MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da Percepção**. Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2011.

MONTEIRO. L. C. S. O conceito de infinito e a percepção de movimento. *In*: Encontro nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Pernambuco. **Anais...** Pernambuco: SBEM, 2004, p. 1 – 17.

MORRIS, R. **Uma Breve História do Infinito**: Dos Paradoxos de Zenão ao Universo Quântico. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

PIMENTEL, R. *et al*. O infinito: um estudo sobre as diferentes concepções. **Revista Interfaces**, Suzano, v. 2, n. 2, p. 53 -57. 2010.

PINHEIRO, J. M. L. **O movimento e a percepção do movimento em ambientes de Geometria Dinâmica.** 283p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2018.

RADICE, L. L. **O Infinito:** De Pitagóras a Cantor itinerários filosóficos e matemáticos de um conceito de base. Lisboa: Editorial Notícias-Biblioteca de Conhecimentos Básicos, 1981.

REIS, A. *et al*. Aristóteles: o tratado do infinito. Tradução a partir da edição do texto grego: Aristotelis Physica. Recognovit brevique adnotatione critica instruxit W. D. Ross. Oxford: Oxonii e Typographeo Clarendoniano, 1992. **PERI**, v. 2, n.1, 2010, p. 98 – 110

SEDREZ, M. R. **Forma fractal no ensino de projeto arquitetônico assistido por computador**. 159p. Dissertação (Mestrado em Arquitetura e Urbanismo) – Departamento de Arquitetura e Urbanismo, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2009.

SILVA, J. J. **Filosofia da Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

THOMÉ, S. C. Reflexão e tempo na fenomenologia husserliana. *In*: Seminário de Pós-Graduação em Filosofia da UFSCar, 5, 2009, São Carlos. **Anais...** São Carlos: PPG-Fil-UFSCar, p. 156 – 162.

WIKIPÉDIA. **Trombeta de Toricelli**. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/89/GabrielHorn.png. Acesso em: 05/02/2020.

**Recebido em: 29 de abril de 2020**
**Aprovado em: 09 de agosto de 2020**